

## Основи науково-дослідної роботи

Спеціальність – 6.040106 – “Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування”

Тема: Основи моделювання та теоретичних досліджень

### Практичне заняття №1

#### Мета і задачі:

Моделювання динаміки популяцій у екосистемах за допомогою MathCAD.

#### Теоретичні відомості і методичні вказівки

Математична модель динаміки чисельності окремої популяції при умовах достатньої кількості їжі, відсутності скупченості та ворогів описується таким рівнянням:

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}; \quad (1)$$

де  $N_0$  – чисельність популяції у початковий момент часу;  
 $r$  – питома швидкість розмноження.

Рівняння (1) отримане при розв’язку диференційного рівняння Мальтуса

$$\frac{dN}{dt} = rN.$$

При несприятливих умовах питома швидкість смертності  $d$  може перевищувати питому швидкість народження  $b$ , при цьому питома швидкість розмноження  $r = d - b$  є від’ємною.

При врахуванні скупченості динаміка чисельності окремої популяції описується таким рівнянням:

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) - r(t-t_0)}}; \quad (2)$$

де  $K$  – максимально можлива чисельність популяції.

Рівняння (2) отримане при розв’язку логістичного диференційного рівняння

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2.$$

При врахуванні міжвидових взаємодій необхідно розв’язувати таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2; \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 + \gamma_2 N_2 N_1. \end{cases} \quad (3)$$

де  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  – коефіцієнти, що враховують взаємодію видів.

Основні типи взаємодій такі:

(+,-) – хижак-жертва (паразит-жертва),

(+,+) – симбіоз (муталізм),

(-,-) – конкуренція,

(+,0) – коменсалізм,

(-,0) – аменсалізм,

(0,0) – нейтралізм.

Більш точне дослідження динаміки міжвидових взаємодій можливе при застосуванні систем нелінійних диференційних рівнянь Вольтерра-Лотки, що враховують засвоєння їжі хижаком, мисливську стратегію хижака, захисну реакцію жертви, наявність схованок для жертви тощо.

При деякій втраті точності аналізу та заміні  $dt$  на  $\Delta t$ , можливо замінити систему нелінійних диференційних рівнянь системою рекурентних рівнянь. Це дозволяє значно спростити розрахунки та зробити їх прозорими та наочними. Наприклад, система (3) перетвориться у таку систему:

$$\begin{cases} N_{i+1} = N_i + \left( r_n N_i - \frac{r_n}{K_n} N_i^2 + \gamma_n N_i M_i \right); \\ M_{i+1} = M_i + \left( r_m M_i - \frac{r_m}{K_m} M_i^2 + \gamma_m M_i N_i \right). \end{cases} \quad (4)$$

У системі (4.4) використовується дискретний час  $i$ , що відповідає кроку реального часу (середньому періоду розмноження  $T = \min(T_n, T_m)$ ).

Проведемо моделювання динаміки чисельності окремої популяції за диференційним рівнянням Мальтуса. Підставивши початкову чисельність популяції  $N_0=10$ , швидкість розмноження  $0,1$  1/рік, та початковий час  $1995$  у розв'язок рівняння Мальтуса отримаємо такий результат (див.рис.1).

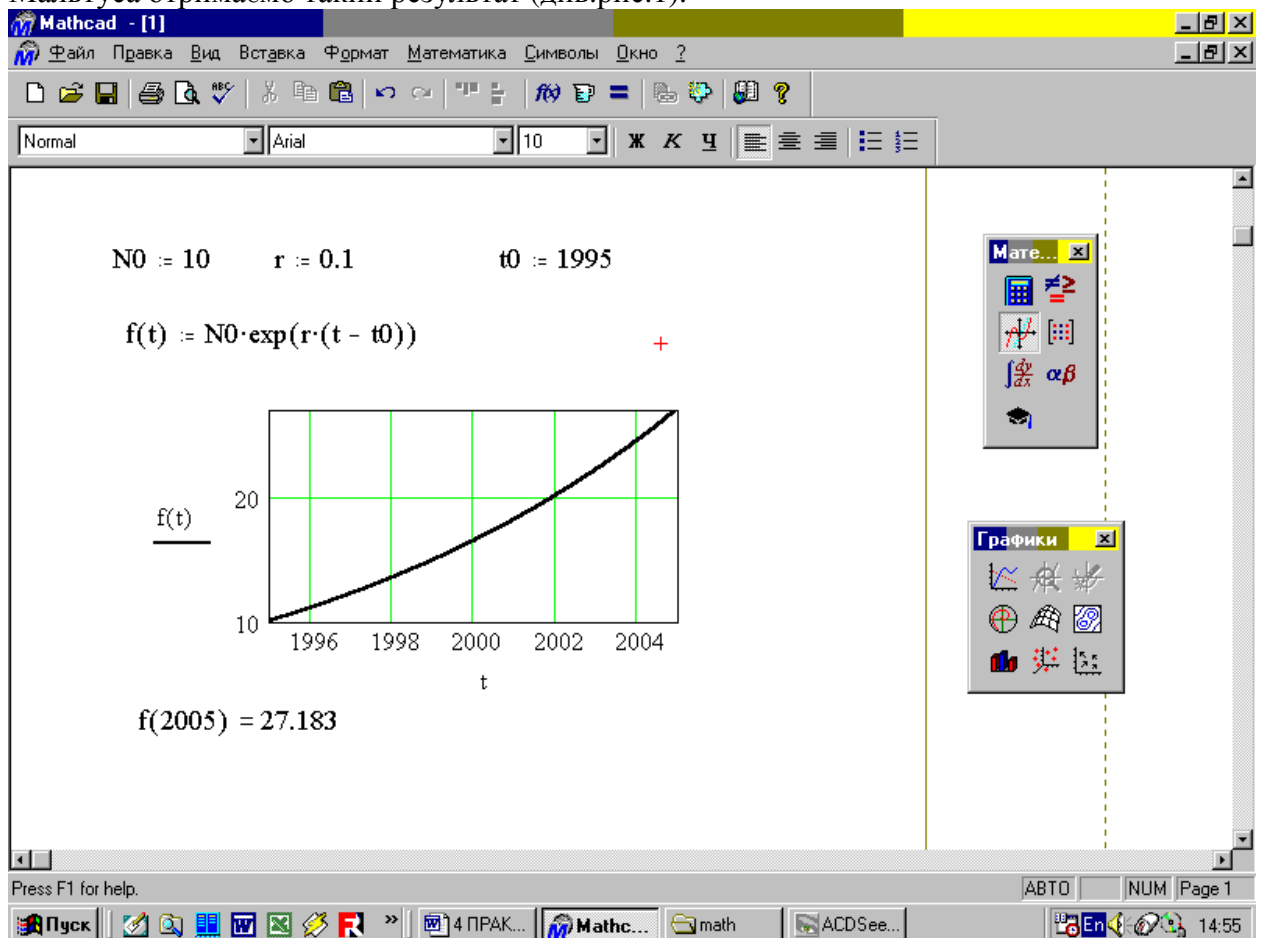


Рисунок 1 - Моделювання динаміки чисельності окремої популяції за диференційним рівнянням Мальтуса

Проведемо аналогічне дослідження замінивши розв'язок диференційного рівняння Мальтуса на рекурентне рівняння типу  $N_{i+1} = N_i + r \cdot N_i$  (див.рис.4.2). Помітна

невелика похибка у обчисленнях біля 5%, що пояснюється проведенням перетворенням. Величина похибки є допустимою у моделюванні.

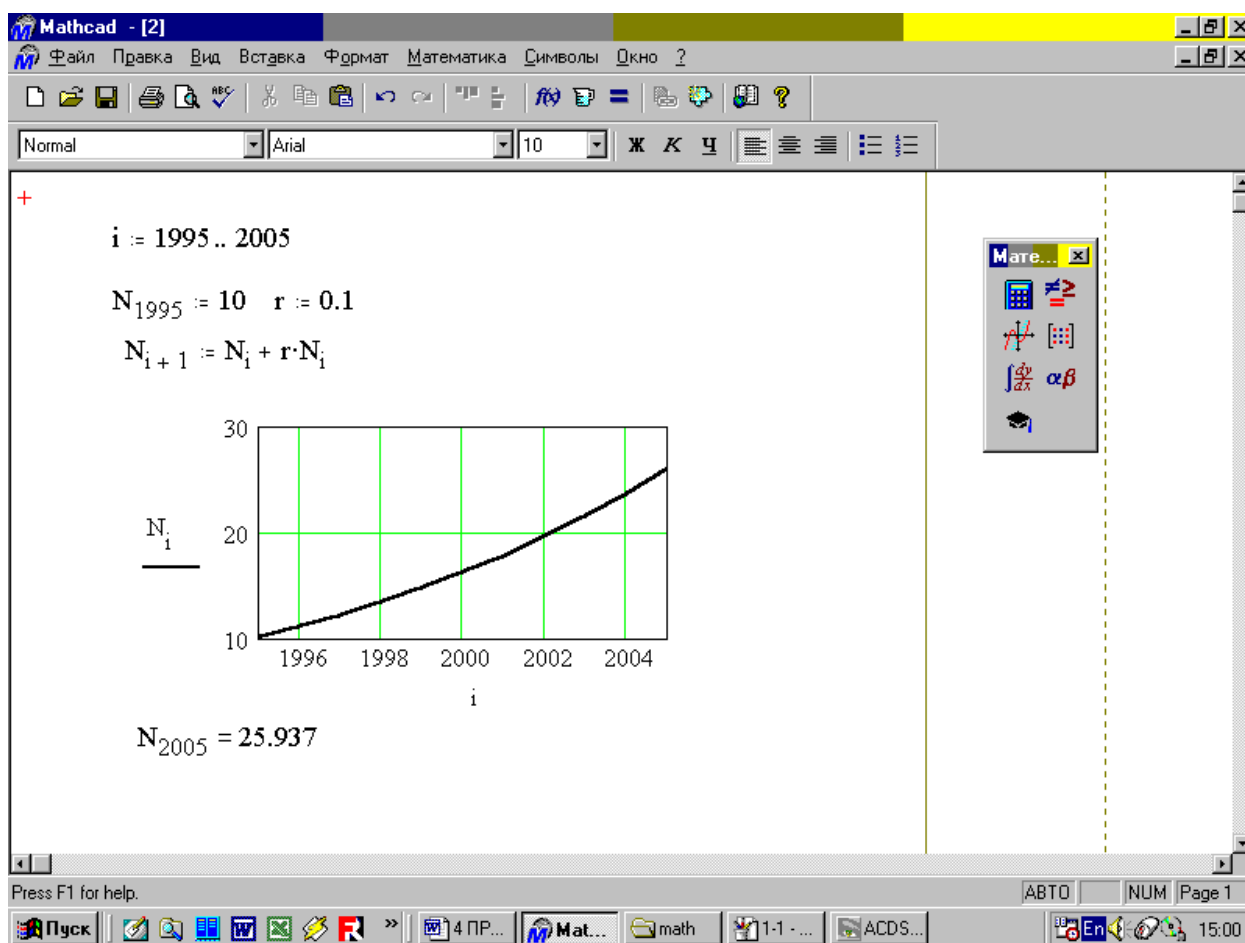


Рисунок 2 - Моделювання динаміки чисельності окремої популяції за рекурентним рівнянням перетвореним з рівняння Мальтуса

Проведемо моделювання динаміки популяцій у двокомпонентній екосистемі вовки-зайці (хижак-жертва) використавши систему рекурентних рівнянь (4) та такі початкові дані:

- початкова кількість зайців 1000
- питома швидкість розмноження зайців 0,3
- максимальна кількість зайців 10000
- початкова кількість вовків 10
- питома швидкість розмноження вовків 0,1
- коефіцієнти взаємодії  $\gamma_1 = -0,01$   $\gamma_2 = 0,001$ .

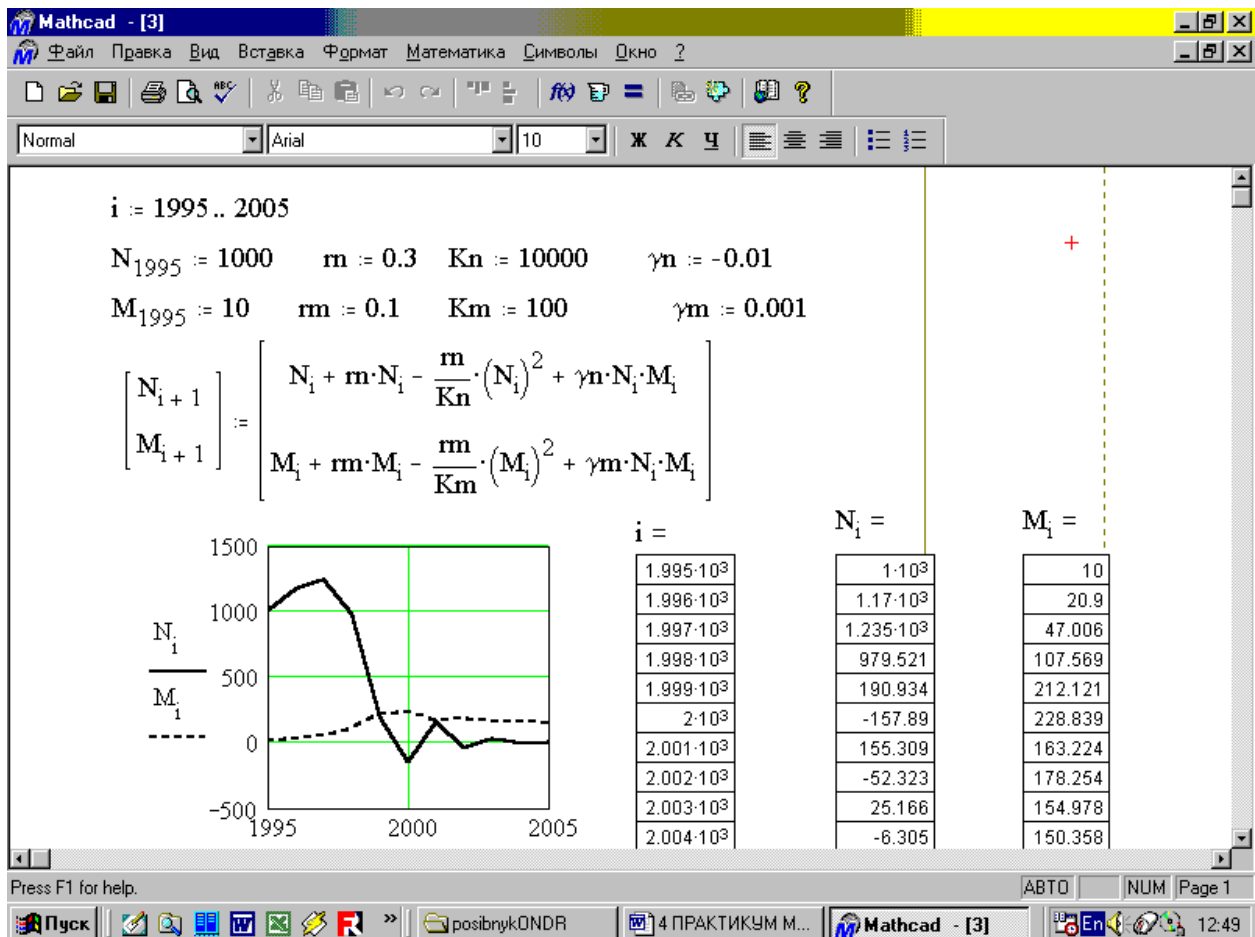


Рисунок 3 - Моделювання динаміки популяцій у двокомпонентній екосистемі хижак-жертва

Проаналізуємо результати моделювання. Популяція N вимирає на шостому кроці моделювання ( $N$  – від’ємне), подальші кроки моделювання не мають реального фізичного змісту. Змінюючи початкові значення можливо спостерігати різні варіанти динаміки популяцій – коливання чисельності, стабілізацію чисельності на певних рівнях, стійкий розвиток тощо.

### Варіанти завдань

Подібно до наведених прикладів виконати моделювання трикомпонентної екосистеми на основі початкових даних наведених у табл.4.1. Питома швидкість розмноження  $r_1=0,1$ ;  $r_2=0,2$ ;  $r_3=0,3$ . Проаналізувати отримані результати. Ввести додаткову залежність чисельності або швидкості розмноження однієї з популяцій від температури (див. табл. 4.2). Змінюючи параметри екосистеми дослідити всі можливі варіанти динаміки популяцій. Результати моделювання включити у звіт з ОНДР.

Таблиця 4.1

Початкові дані для моделювання динаміки популяцій у екосистемах за допомогою MathCAD

В а р і а н т	Тип взаємодій між популяціями			Початкові чисельності популяцій			Коефіцієнти взаємодії $\gamma$		
	1-2	2-3	1-3	1	2	3	1-2	2-3	1-3
1.	хижак-жертва	хижак-жертва	нейтралізм	2	2	3	0.01	0.01	0.01
2.	хижак-жертва	симбіоз	нейтралізм	4	5	6	0.01	0.01	0.01
3.	хижак-жертва	конкуренція	нейтралізм	7	8	9	0.01	0.01	0.01
4.	хижак-жертва	коменсалізм	нейтралізм	1 0	1 1	1 2	0.01	0.01	0.01
5.	хижак-жертва	аменсалізм	нейтралізм	1 3	1 4	1 5	0.01	0.01	0.01
6.	хижак-жертва	хижак-жертва	хижак-жертва	1 6	1 7	1 8	0.01	0.01	0.01
7.	симбіоз	симбіоз	симбіоз	1 9	2 0	2 1	0.01	0.01	0.01
8.	конкуренція	конкуренція	конкуренція	2 2	2 3	2 4	0.01	0.01	0.01
9.	хижак-жертва	хижак-жертва	симбіоз	2 5	2 6	2 7	0.01	0.01	0.01
10.	хижак-жертва	хижак-жертва	коменсалізм	2 8	2 9	3 0	0.01	0.01	0.01
11.	хижак-жертва	хижак-жертва	конкуренція	3 1	3 2	3 3	0.01	0.01	0.01
12.	хижак-жертва	хижак-жертва	аменсалізм	3 4	3 5	3 6	0.01	0.01	0.01
13.	симбіоз	симбіоз	хижак-жертва	3 7	3 8	3 9	0.01	0.01	0.01
14.	симбіоз	симбіоз	конкуренція	4 0	4 1	4 2	0.01	0.01	0.01
15.	симбіоз	симбіоз	коменсалізм	4 3	4 4	4 5	0.01	0.01	0.01

16	симбіоз	симбіоз	аменсалізм	4 6	4 7	4 8	0.01	0.01	0.01
17	симбіоз	симбіоз	нейтралізм	4 9	5 0	5 1	0.01	0.01	0.01
18	конкуренція	конкуренція	симбіоз	5 2	5 3	5 4	0.01	0.01	0.01
19	конкуренція	конкуренція	хижак-жертва	5 5	5 6	5 7	0.01	0.01	0.01
20	конкуренція	конкуренція	коменсалізм	5 8	5 9	6 0	0.01	0.01	0.01
21	конкуренція	конкуренція	аменсалізм	6 1	6 2	6 3	0.01	0.01	0.01
22	симбіоз	хижак-жертва	симбіоз	6 4	6 5	6 6	0.01	0.01	0.01
23	симбіоз	хижак-жертва	конкуренція	6 7	6 8	6 9	0.01	0.01	0.01
24	симбіоз	хижак-жертва	коменсалізм	7 0	7 1	7 2	0.01	0.01	0.01
25	симбіоз	хижак-жертва	аменсалізм	7 3	7 4	7 5	0.01	0.01	0.01
26	симбіоз	хижак-жертва	нейтралізм	7 6	7 7	7 8	0.01	0.01	0.01
27	конкуренція	хижак-жертва	симбіоз	7 9	8 0	8 1	0.01	0.01	0.01
28	конкуренція	хижак-жертва	коменсалізм	8 2	8 3	8 4	0.01	0.01	0.01
29	конкуренція	хижак-жертва	аменсалізм	8 5	8 6	8 7	0.01	0.01	0.01
30	хижак-жертва	нейтралізм	симбіоз	8 8	8 9	9 0	0.01	0.01	0.01

Таблиця 4.2

Середні температури у екосистемі  $^{\circ}\text{C}$

(час відповідає кроку моделювання (середньому періоду розмноження))

варіанти 1-10	варіанти 11-20	варіанти 21-30
10	1	3
12	2	3
14	2	4
16	2	4
13	2	4
12	2	4
14	2	5
15	2	5
17	2	5
17	2	5
17	2	5
20	2	5
23	2	5
27	3	5
30	3	5
33	3	5
36	4	7
43	4	7
45	4	7
40	4	7
39	5	7
38	5	7
35	5	7
34	5	7
33	5	7

32	5	7
31	5	7
28	5	7
21	5	7
18	5	8
17	5	8
15	5	8
14	5	8
13	5	8
11	5	8
12	5	8
10	5	8
9	5	8

Приклади залежності  $r_i$  від температури:

$$r_i = R \cdot e^{t-t_0};$$

де  $R$  - константа, що визначає чисельність при температурі  $t_0$ ;

$t$  – поточна середня температура.

### Підсумок

У реальних екосистемах існує значно більше популяцій різних видів і взаємодія між ними є більш складною. У даній практичній роботі наведено досить спрощену модель динаміки популяцій. Однак вона дає адекватні результати для практичного застосування у роботі фахівців-екологів та є підґрунтям для подальшого самостійного вдосконалення.

### Контрольні питання

- Опишіть загальні властивості системи MATLAB.



- Які особливості роботи з MATLAB у режимі командного рядка?
- Які особливості роботи з пакетом Simulink системи MATLAB та основні переваги візуального програмування?
- Як настраюється система MATLAB?
- Як здійснюється налаштування графічного інтерфейсу у середовищі MATLAB?
- Охарактеризуйте засоби допомоги користувачеві MATLAB-Demos.
- Які особливості роботи у Maple?
- Як здійснюється інтегрування та диференціювання у Maple?
- Як здійснюється побудова графіків у Maple ?
- Які є функції для побудови двовимірних та тривимірних графіків у Maple?
- Що є спільного у пакетах Maple, MATLAB та MathCAD?
- Як здійснюється оптимізація результатів досліджень за допомогою математичних пакетів?
- Які особливості застосування і переваги системи Scilab?

#### **Джерела інформації**

- Петрук В.Г., Володарський Є.Т., Мокін В.Б. Основи науково-дослідної роботи. Навчальний посібник / Під ред. д.т.н., проф. Петрука В. Г. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 143 с.